

АДМИНИСТРАЦИЯ ГОРОДА ТОМСКА
ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ
МУНИЦИПАЛЬНОЕ АВТОНОМНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА №67 г. ТОМСКА

Согласовано
На педагогическом совете
МАОУ СОШ №67 г. Томска
Протокол №1 от 29/08/2024

Утверждаю
Директор МАОУ СОШ №67 г.
Томска
_____ Т.А.Лескова
Приказ №147-о от
29.08.2024

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА
**«Методические рекомендации при подготовке учащихся к
решению задач повышенной сложности по планиметрии (2
часть ОГЭ, ЕГЭ)»**

Предмет: Геометрия (углубленный уровень).

Класс: 9-11.

Автор: Коновальчик Лариса Анатольевна, учитель математики высшей категории, стаж 17 лет.

Содержание:

Введение.	2
I. Свойства биссектрисы треугольника.	3 – 5
II. Свойство биссектрисы внешнего угла треугольника.	5 – 7
III. Теорема Менелая.	7 – 10
IV. Угол между касательной и хордой.	11 - 16
V. Ортоцентр.	16 - 20
Заключение.	20
Литература.	21

Уча других, мы учимся сами.

Сенека.

Количество геометрических задач, встречающихся в контрольно-измерительных материалах (КИМ) единого экзамена, невелико. Их доля составляет не более 16 % от общего числа задач (не затрагивая элементарные задачи планиметрии). Однако умение решать такие задачи может оказаться решающим аргументом при поступлении в престижные или популярные вузы.

Анализируя результаты решения абитуриентами геометрических задач на вступительных испытаниях по математике, видим печальную статистику: с задачами по геометрии справляются не более 10 % поступающих, решают неправильно – около 30 %, а порядка 60 % абитуриентов полностью игнорируют такие задачи.

В чем причины? Они связаны не только с пробелами в знании предмета, но и с отсутствием у учащегося серьезного опыта в решении многослойных геометрических задач. Вполне возможно, что часть учащихся, потенциально обладающих уровнем подготовки, достаточным для решения геометрических задач, помещаемых в варианты ЕГЭ и ОГЭ, просто не доверяет своим знаниям и умениям и, полагая заранее, что задачи очень трудные, не берется за их решение.

Дело в том, что в обычной (не профильной или специализированной) школе планиметрию изучают только в 7–9-х классах, на эту дисциплину отводится два урока в неделю, что совершенно недостаточно для того, чтобы хорошо изучить свойства фигур планиметрии и научиться применять их при решении задач. Кроме того, каждая задача по геометрии уникальна по своему содержанию, поэтому для решения таких задач практически неприменим алгоритмический подход, который является весьма успешным при решении задач по алгебре, в результате многие школьники даже не пытаются решать геометрические задачи. Все это приводит к тому, что и сравнительно несложная задача по планиметрии становится непосильной для выпускников школ.

Решение почти каждой геометрической задачи – это **маленькая исследовательская работа**. Чтобы с ней справиться, ученик должен иметь солидный опыт такого рода деятельности. И тут мы сталкиваемся с противоречием – опыт должен быть большой, а часов на изучение геометрии в школьном курсе отводится мало. Частичный выход из этого положения видится в использовании времени, отведенного в средней школе на повторение всего курса геометрии, исключительно для решения геометрических задач, взятых из вариантов ЕГЭ и ОГЭ.

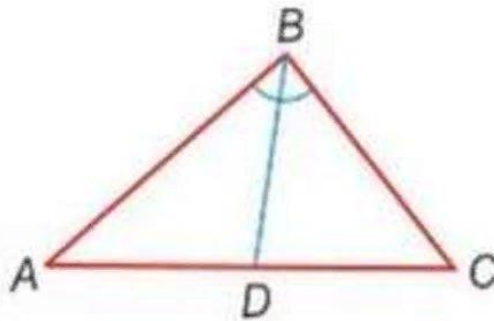
А так же мы должны помнить о том, что очень часто автор учебника важные свойства геометрических фигур скрывает в формулировках задач. И наша функция учителя-наставника, раскрыть эти свойства ученику. Так как

знание этих свойств упрощает решение многих сложных геометрических задач.

I. Свойства биссектрисы треугольника.

Свойство биссектрисы треугольника

**Биссектриса треугольника делит
противоположную сторону треугольника на
отрезки, пропорциональные прилежащим
сторонам треугольника**



$$\frac{BA}{BC} = \frac{AD}{DC}$$



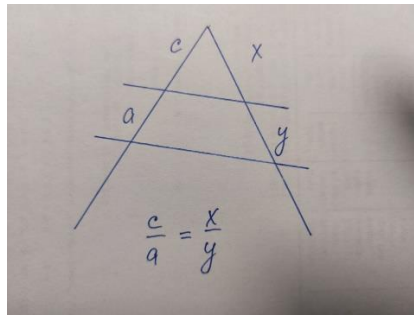
Дано: $\triangle ABC$, BD – биссектриса.

Доказать: $AB/BC = AD/DC$

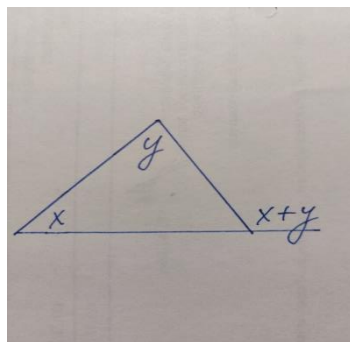
Доказательство:

Для доказательства этого свойства нам потребуется вспомнить дополнительные факты:

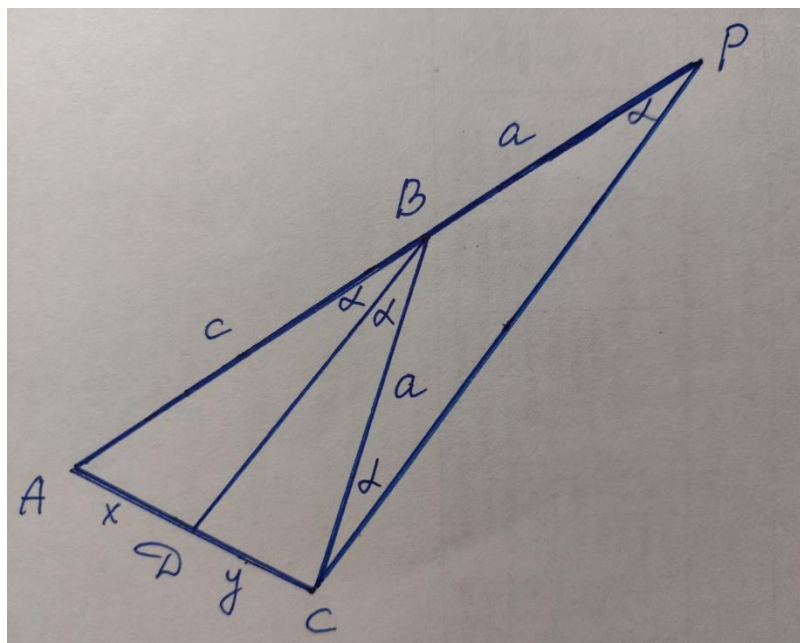
1. Теорема Фалеса: Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.



2. Свойство внешнего угла треугольника: Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних не смежных с ним.



Приступим к доказательству.



Выполним дополнительное построение: проводим прямую $CP \parallel BD$.

$\angle PCB = \angle DBC = \alpha$, так как НЛУ при $DB \parallel CP$ и секущей BC ;

$\angle ABC = 2\alpha$ – внешний угол $\triangle CPB$, следовательно

$\angle ABC = \angle BPC + \angle BCP$

$2\alpha = \angle BPC + \alpha$, то есть $\angle BPC = \alpha$, следовательно, $\triangle BCP$ – равнобедренный, следовательно, $BP = BC = a$.

Тогда по теореме Фалеса: $c/a = x/y$.

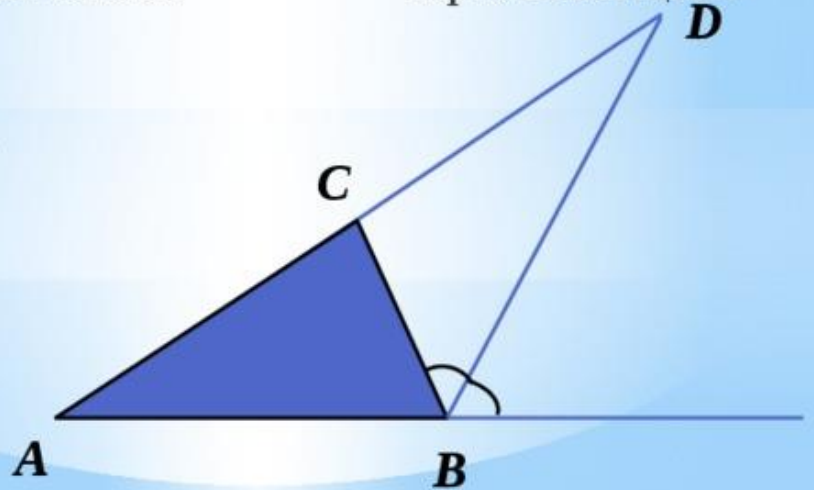
Что и требовалось доказать.

II. Свойство биссектрисы внешнего угла треугольника.

* Свойство биссектрисы внешнего угла треугольника

Биссектриса внешнего угла треугольника делит продолжение противоположной стороны на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC}$$



Дано: $\triangle ABC$, BD – биссектриса внешнего угла треугольника при вершине B , $AC \cap BD = D$.

Доказать: $AD/CD = AB/BC$.

Доказательство:

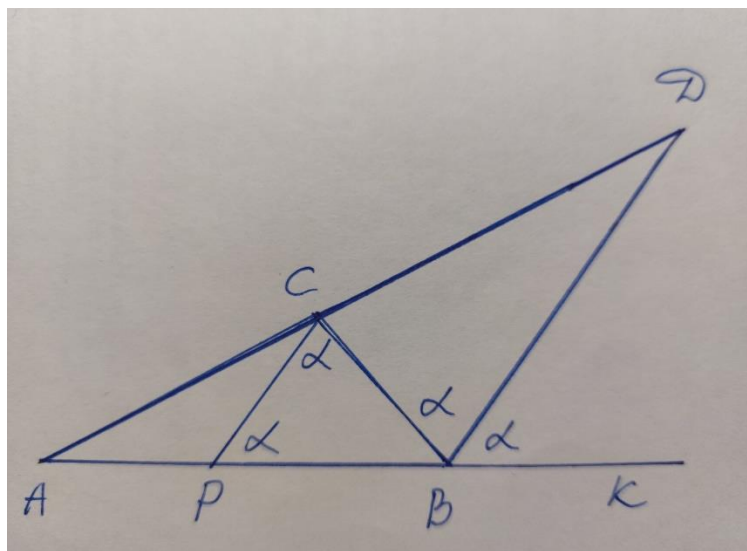
Выполним дополнительное построение: $CP \parallel BD$.

$\angle PCB = \angle CBD = \alpha$, так как НЛУ при $CP \parallel BD$ и секущей CB ;

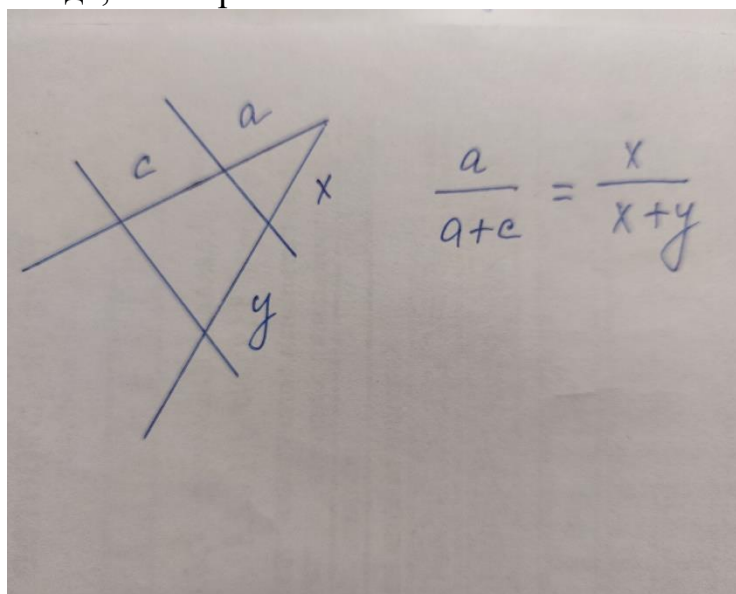
$\angle CBK = 2\alpha$ – внешний угол $\triangle CPB$, следовательно,

$\angle CBK = \angle PCB + \angle CPB$

$2\alpha = \alpha + \angle CPB$, следовательно, $\angle CPB = \alpha$, следовательно, $\triangle CPB$ – равнобедренный, то есть $CB = PB$.



Тогда, по теореме Фалеса:



Или, $AD/CD = AB/PB$, что равнозначно, с учетом доказанного, $AD/CD = AB/BC$.

Что и требовалось доказать.

Задача №17 (ЕГЭ).

На отрезке BD взята точка C . Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD .

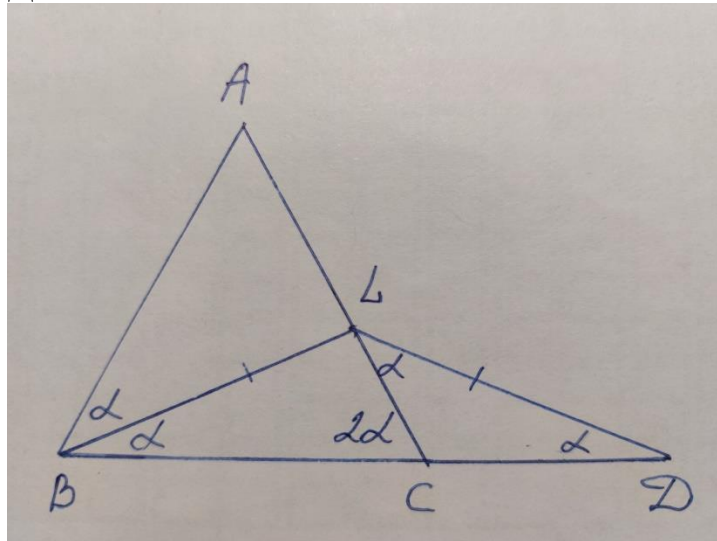
а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos \angle ABC = 3/4$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB ?

Дано: $\triangle ABC$ – равнобедренный, BC – основание, BL – биссектриса, точка C принадлежит отрезку BD , $\triangle BLD$ – равнобедренный, BD – основание.

а) Доказать: $\triangle DCL$ – равнобедренный.

Доказательство:



Если $\angle ABL = \angle LBC = \alpha$ (так как BL – биссектриса), следовательно, $\angle BDL = \alpha$ (так как $\triangle BLD$ – равнобедренный).

$\angle BCA = 2\alpha$ (так как $\triangle ABC$ – равнобедренный),

$\angle BCA$ – внешний угол $\triangle LCD$, следовательно, по свойству внешнего угла $\angle BCA = \angle LDC + \angle DLC$

$2\alpha = \alpha + \angle DLC$, следовательно, $\angle DLC = \alpha$, следовательно, $\triangle DCL$ – равнобедренный. Что и требовалось доказать.

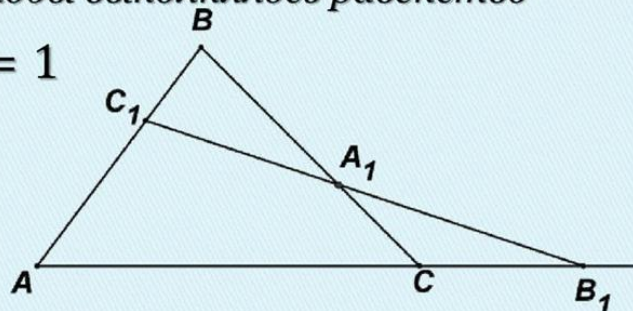
III. Теорема Менелая.

Теорема Менелая

(теорема о треугольнике и секущей)

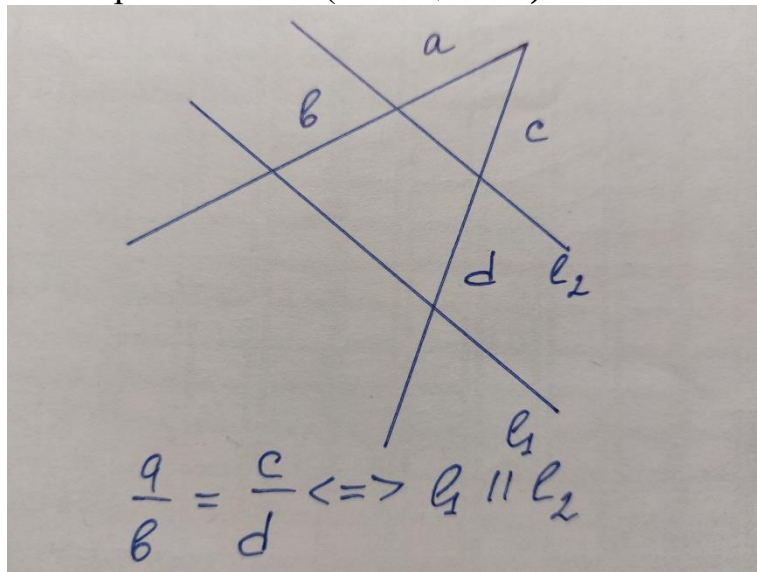
На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены соответственно точки C_1 и A_1 , а на продолжении стороны AC – точка B_1 , для того чтобы точки лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

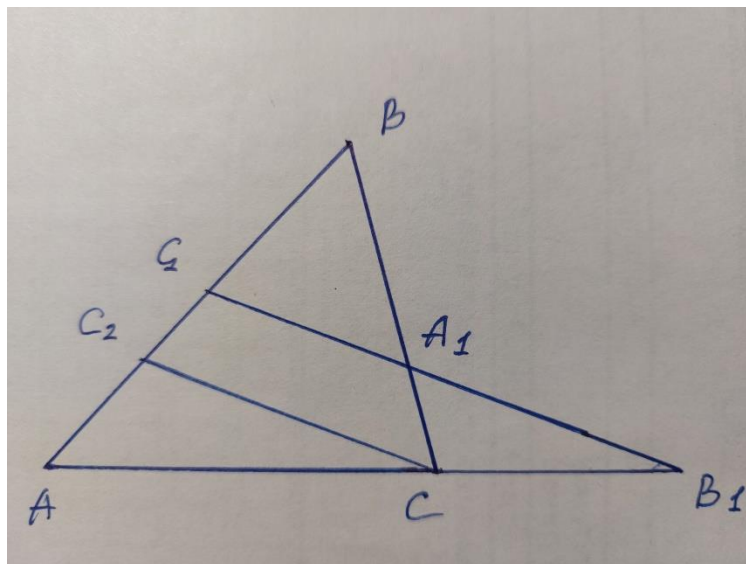


Доказательство:

По теореме Фалеса (обобщенная):



Выполним дополнительное построение: проведем $CC_2 \parallel C_1B_1$.



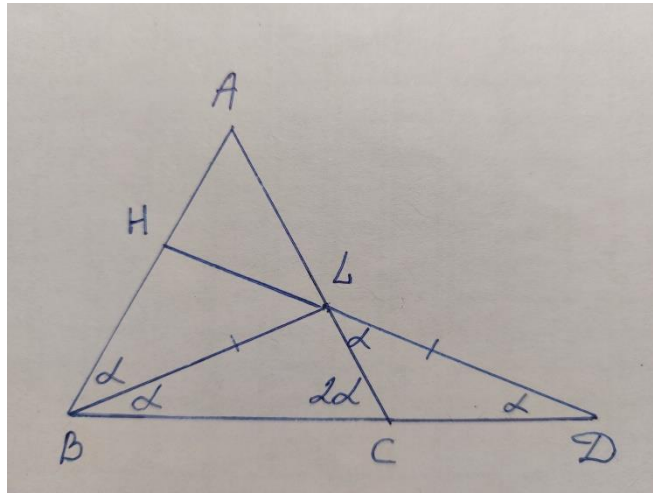
Применяем обобщенную теорему Фалеса к уравнению Менелая $AC_1/C_1B \cdot BA_1/A_1C \cdot CB_1/B_1A = 1$. Перенесем все отрезки на сторону AB. BA_1 переходит в BC_1 , A_1C в C_1C_2 , CB_1 в C_1C_2 , B_1A в AC_1 . Подставляем в уравнение Менелая $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1C_2} \cdot \frac{C_1C_2}{AC_1} = 1$. Что и требовалось доказать.

Вернемся к задаче №17 (ЕГЭ).

б) $\cos \angle ABC = \frac{3}{4}$.

Найти: в каком отношении прямая DL делит сторону AB.

Решение:



По теореме косинусов:

Если $AB = c$, следовательно, $AC = c$, так как $\triangle ABC$ – равнобедренный, тогда

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 AB * BC * \cos \angle B$$

$$c^2 = c^2 + BC^2 - 2 * c * BC * \frac{3}{4}$$

$$BC^2 = 2 * c * BC * \frac{3}{4}$$

$$BC = 1,5c.$$

По свойству биссектрисы треугольника:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{CL}, \text{ следовательно, } \frac{c}{1,5c} = \frac{AL}{CL}, \text{ то есть } \frac{AL}{CL} = \frac{2}{3}, \text{ или } AL = 0,4c, CL = 0,6c.$$

Так как $LC = CD$ (по доказанному в пункте а)), следовательно, $CD = 0,6c$, тогда $BD = 1,5c + 0,6c = 2,1c$.

По теореме Менелая:

$$\frac{BH * AL * CD}{HA * LC * BD} = 1, \text{ так как } LC = CD, \text{ следовательно,}$$

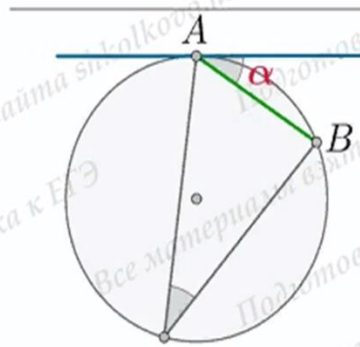
$$\frac{BH * AL}{HA * BD} = 1, \frac{BH}{HA} \frac{BD}{AL}, \frac{BH}{HA} = \frac{2,1c}{0,4c} = \frac{21}{4}.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{AH}{BH} = \frac{4}{21}.$$

Ответ: 4:21.

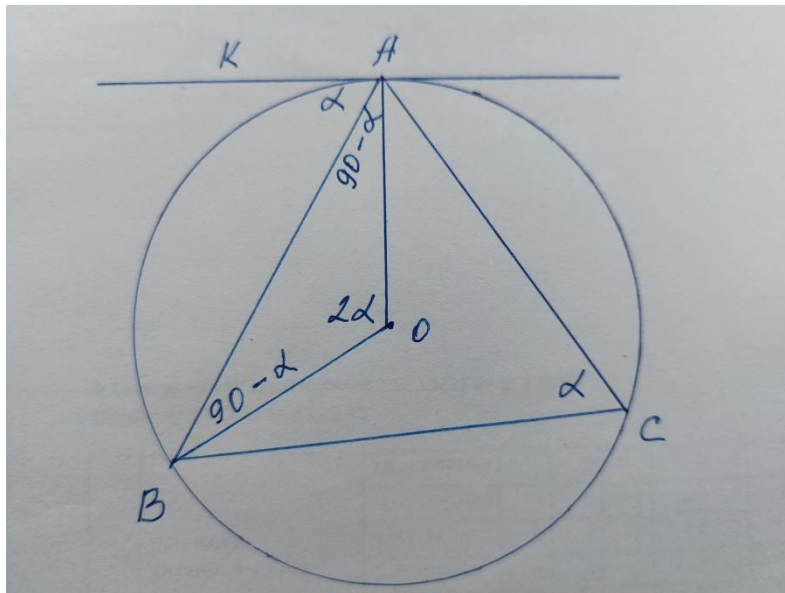
IV. Угол между касательной и хордой.

Угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, равен половине дуги, заключенной между ними.



$$\angle \alpha = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AB}$$

Или: Угол между хордой AB и касательной в точке A, равен углу ACB – вписанному углу, опирающемуся на хорду AB.



Дано: окружность с центром в точке O, AB – хорда, AK – касательная к окружности в точке A, $\angle ACB$ – вписанный угол, опирающийся на хорду AB.

Доказать: $\angle KAB = \angle ACB$.

Доказательство:

Выполним дополнительное построение: $AO = OB = R$, следовательно, $\triangle AOB$ – равнобедренный.

Так как $\angle KAO = 90^\circ$ (угол между касательной и радиусом, проведенным в точку касания), следовательно, если $\angle KAB = \alpha$, то $\angle BAO = 90^\circ - \alpha$.

Тогда $\angle ABO = 90^\circ - \alpha$ ($\angle BAO = \angle ABO$, как углы при основании равнобедренного треугольника).

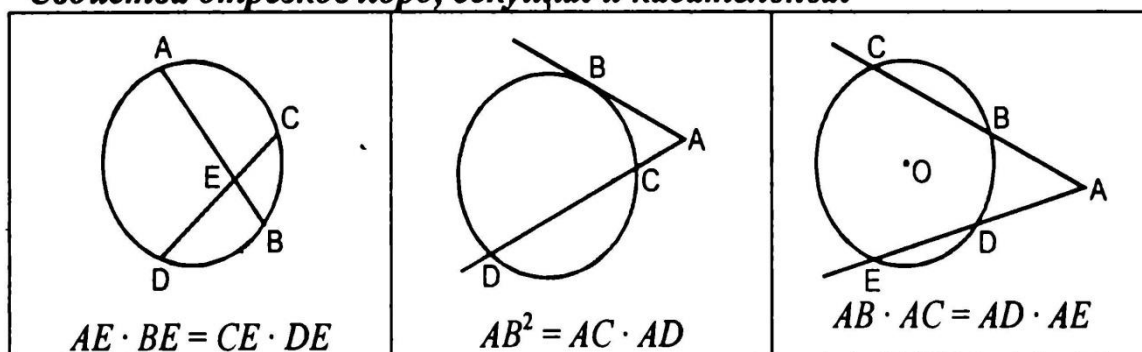
По теореме о сумме углов треугольника:

$$\angle AOB = 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha.$$

$\angle AOB$ – центральный угол, опирающийся на дугу AB , следовательно, $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = \alpha$ (как вписанный угол). Таким образом, $\angle KAB = \angle ACB$.
Что и требовалось доказать.

Здесь же нельзя не вспомнить о *свойствах отрезков пересекающихся хорд, секущих и касательных*.

Свойства отрезков хорд, секущих и касательных



А так же о *параллельных хордах*.



Дано: окружность, AB и CD – хорды, $AB \parallel CD$.

Доказать: $\cup AC = \cup BD$.

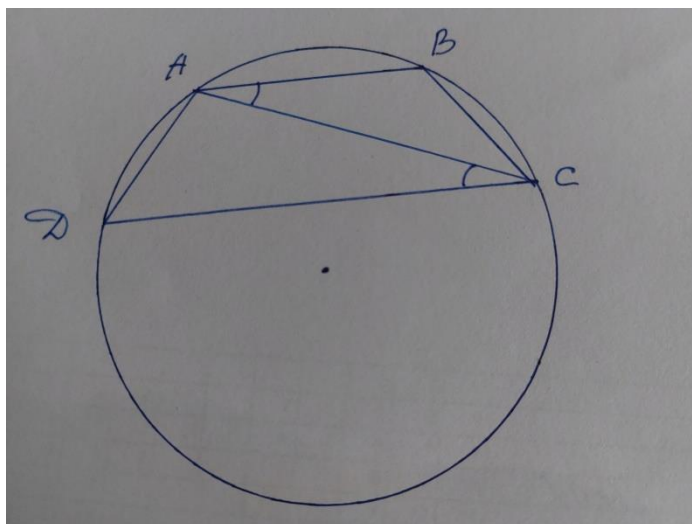
Доказательство:

Выполним дополнительное построение: AC .

Так как $AB \parallel CD$, следовательно, $\angle BAC = \angle ACD$ (как накрест лежащие углы при секущей AC).

Отсюда, $\cup AD = \cup BC$ (как дуги, на которые опираются равные вписанные углы), а следовательно и хорды AD и BC равны.

То есть **Параллельные хорды высекают равнобедренную трапецию**.



Теперь рассмотрим очень часто встречающуюся в задачах №17 ЕГЭ и №25 ОГЭ конструкцию.

Две окружности касаются внутренним образом, A – точка касания, AB и AC – хорды большей окружности, пересекающие меньшую окружность в точках P и Q соответственно.

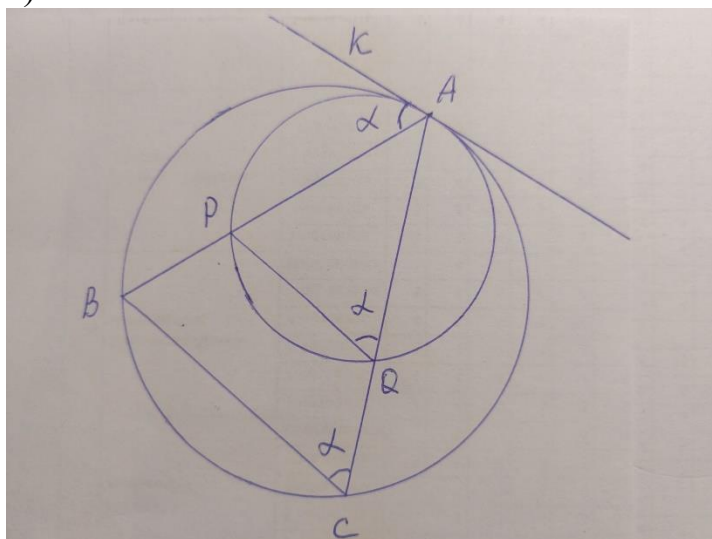
Доказать: а) $PQ \parallel BC$;

б) $\angle MAB = \angle NAC$ (точки M и N – точки пересечения прямой PQ с большей окружностью).

Доказательство:

!!! Обязательно проводим общую касательную.

а)



Рассматриваем факт о хорде и касательной для маленькой окружности: $\angle KAP = \angle AQP = \alpha$.

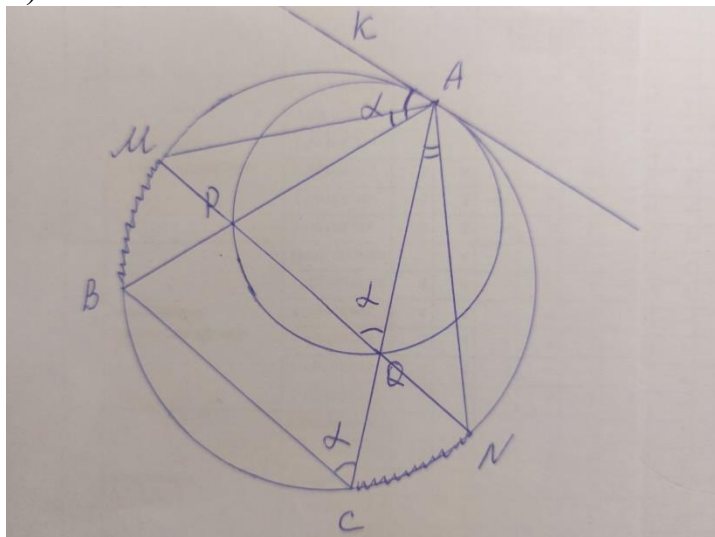
Рассматриваем тот же факт для большой окружности:

$\angle KAP = \angle ACB = \alpha$.

Следовательно, $\angle AQP = \angle ACB = \alpha$, они соответственные углы при секущей AC , следовательно, $BC \parallel PQ$.

Что и требовалось доказать.

б)



Так как $BC \parallel PQ$, а параллельные прямые высекают равные дуги, следовательно, $\text{дуга } MB = \text{дуга } CN$.

На равные дуги опираются равные вписанные углы, следовательно, $\angle MAB = \angle NAC$.

Что и требовалось доказать.

Задача №17 (ЕГЭ).

Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P .

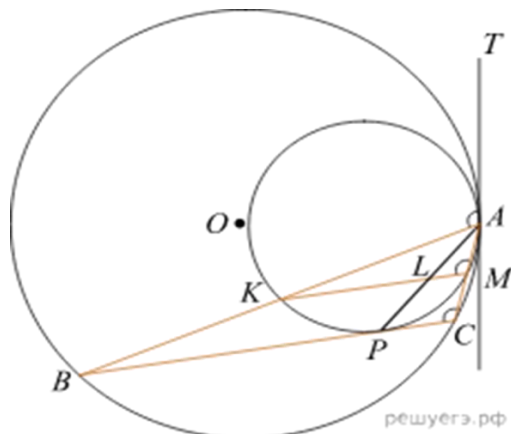
Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.

б) Пусть L — точка пересечения отрезков KM и AP . Найдите AL , если радиус большей окружности равен 10, а $BC = 16$.

Доказательство:

а) $KM \parallel BC$



1. Выполним дополнительное построение: $OH \perp BC$, H – середина BC , так как $\triangle BOC$ – равнобедренный, следовательно, OH – медиана, тогда по теореме Пифагора: $OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.
2. $OH \parallel PQ$ (Q – центр малой окружности, QP – радиус в точку касания): $OH \perp BC$, $QP \perp BC$.
3. Выполним дополнительное построение: $QF \perp OH$, тогда $OF = OH - FH = 6 - 5 = 1$, так как $FH = R/2 = 5$.
4. Из $\triangle OQF$ по теореме Пифагора: $QF^2 = OQ^2 - OF^2 = 25 - 1 = 24$, следовательно, $HP^2 = QF^2 = 24$.
5. Из $\triangle OHP$ по теореме Пифагора: $OP^2 = HP^2 + OH^2 = 24 + 36 = 60$.
6. $\triangle OAP$ – прямоугольный так как $\angle OPA$ опирается на диаметр малой окружности, следовательно, по теореме Пифагора:
 $AP = \sqrt{OA^2 - OP^2} = \sqrt{10^2 - 60} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.
7. По теореме синусов.
 В $\triangle AKM$: $\frac{KM}{\sin A} = 2R = 2 \cdot 5$;
 В $\triangle ABC$: $\frac{BC}{\sin A} = 2R = 2 \cdot 10$.

Следовательно, $\frac{KM}{BC} = \frac{1}{2}$. Тогда, KM – средняя линия $\triangle ABC$ и по теореме Фалеса: $AL = 1/2AP = \sqrt{10}$.

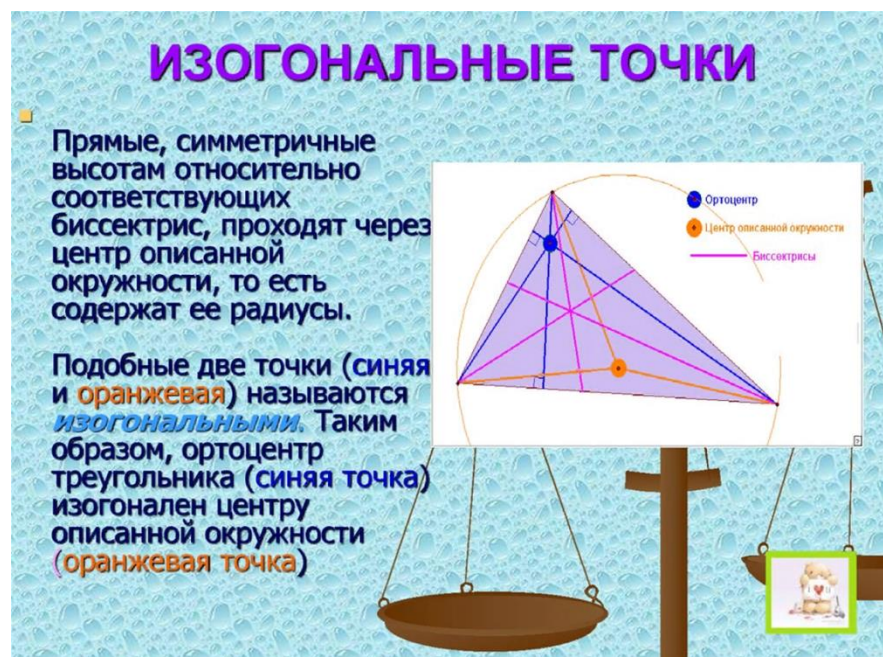
Ответ: $\sqrt{10}$.

V. Ортоцентр.

а) Определение ортоцентра:

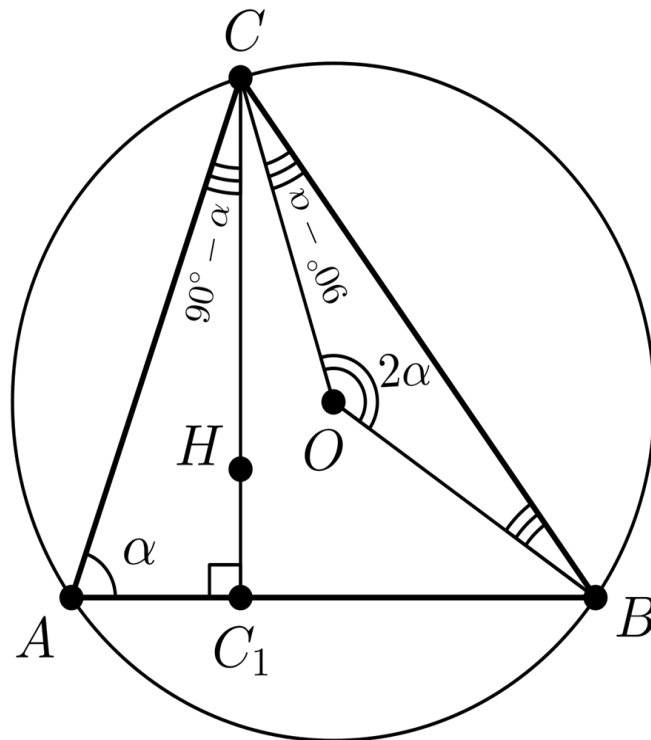


б) Изогональные точки:



в) Свойство ортоцентра: При изогональном сопряжении ортоцентр переходит в центр описанной окружности.

ИЛИ: В остроугольном треугольнике угол между стороной и высотой равен углу между стороной и радиусом описанной окружности.



Дано: $\triangle ABC$, $CC_1 \perp AB$, O – центр описанной окружности, OC и OB – радиусы описанной окружности.

Доказать: $\angle ACC_1 = \angle BCO$

Доказательство:

Пусть $\angle A = \alpha$, тогда в $\triangle ACC_1$ $\angle ACC_1 = 90^\circ - \alpha$.

$\angle AOC = 2\alpha$, так как является центральным углом опирающимся на ту же дугу, что и вписанный $\angle BAC$.

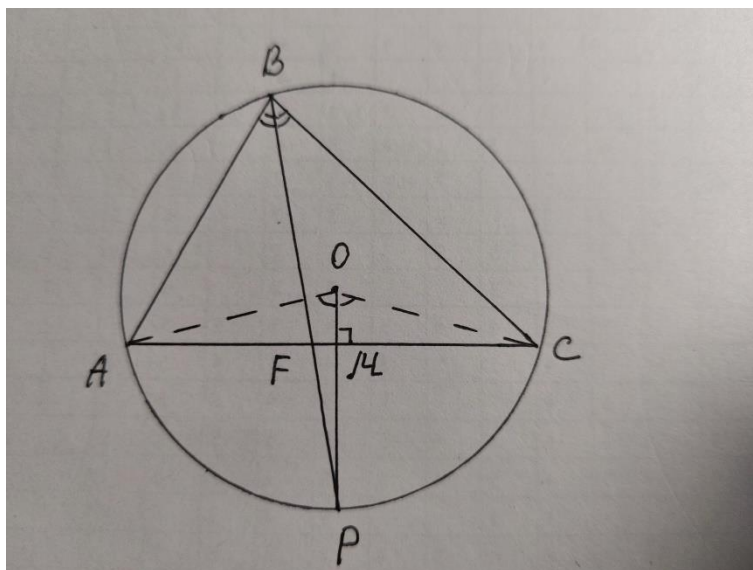
Следовательно, в равнобедренном $\triangle BOC$, по теореме о сумме углов треугольника, $\angle B = \angle C = (180^\circ - 2\alpha)/2 = 90^\circ - \alpha$.

Что и требовалось доказать.

Раз уж разговор зашел об описанной окружности, нельзя не вспомнить свойства, связанные с этим геометрическим объектом.

г) Биссектриса и серединный перпендикуляр остроугольного треугольника пересекаются в точке, лежащей на описанной

около треугольника окружности.



Доказательство:

Если провести $OM \perp AC$, то OM будет медианой и биссектрисой, так как $\triangle AOC$ равнобедренный, следовательно, $\angle AOM = \angle COM$, а следовательно дуга $AP =$ дуге PC .

Проведем отрезок BP . Получаем два равных вписанных угла ABP и PBC . Следовательно BF – биссектриса и OM – серединный перпендикуляр пересекаются в точке P , которая лежит на описанной окружности.

Что и требовалось доказать.

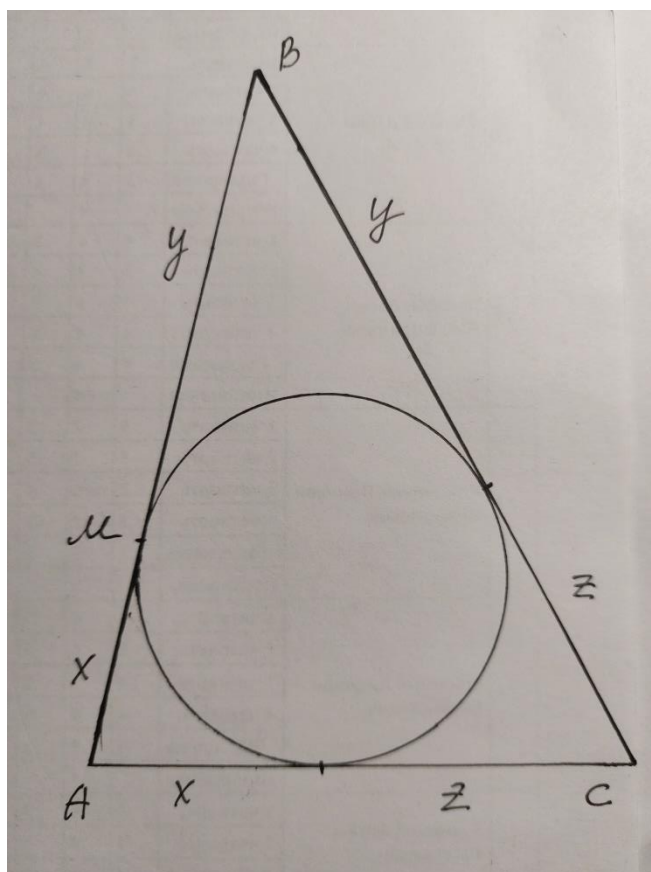
Еще один интересный факт, который часто остается в тени, но при этом очень полезен при решении задач.

д) Если вписанная в треугольник окружность касается стороны AB в точке M , то $AM = p - a$, где p – полупериметр треугольника, a – сторона BC .

Доказательство:

$$\begin{aligned}
 AB &= c & AB + AC &= b + c \\
 BC &= a & b + c &= 2x + y + z & y + z &= a \\
 AC &= b & b + c &= 2x + a \\
 & & 2x &= b + c - a \\
 & & x &= (b + c - a)/2 \\
 & & x &= (b + c + a)/2 - a
 \end{aligned}$$

Так как $y = p - b$, $z = p - c$, следовательно, $x = p - a$.

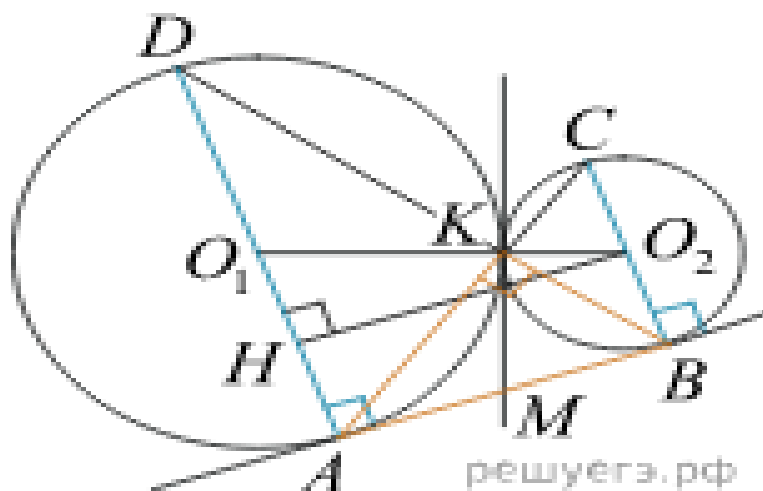


Что и требовалось доказать.

Задача №17 (ЕГЭ).

Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

- Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
- Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.



Доказательство:

а) $AD \parallel BC$.

Центры окружности - O_1 и O_2 .

Дополнительное построение: общая касательная через точку K пересекает AB в точке M .

По свойству касательных $AM = MK$, $MK = MB$. Следовательно, $AM = MB$, то есть MK – медиана, так как $MK = \frac{1}{2} AB$, следовательно, $\triangle AKB$ – прямоугольный, $\angle K = 90^\circ$.

Делаем вывод, что $\angle AKD = 90^\circ$, $\angle CKD = 90^\circ$, следовательно, CB и AD – диаметры, а следовательно, $AD \perp AB$, $CB \perp AB$ по свойству касательной. Отсюда, $AD \parallel CB$.

Что и требовалось доказать.

Решение:

б) Найти площадь $\triangle AKB$, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

$\triangle AKD \sim \triangle BKC$, $k = 4$.

Тогда, если площадь $BKC = S$, то площадь $AKD = 16S$.

У треугольников AKD и CKB общая высота O_2H , следовательно, $S_{AKD}/S_{AKB} = DK/KB = AD/BC$, то есть $S_{AKB} = 4S$ и $S_{CKD} = 4S$.

Тогда $S_{ABCD} = 16S + S + 4S + 4S = 25S$.

Вычислим S_{ABCD} :

O_2O_1H – высота трапеции, найдем из $\triangle O_1O_2H$ по теореме

Пифагора $O_2H = 4$, тогда $S_{ABCD} = (AD + CB)/2 \cdot O_2H = 20$.

Следовательно, $S_{ABCD} = 25S = 20$, то есть $S = 20/25 = 0,8$.

Тогда, $S_{AKB} = 4S = 4 \cdot 0,8 = 3,2$.

Ответ: 3,2.

Заключение.

В процессе работы над систематизацией материалов. Я пришла к выводу, что систематическое изучение в школьном курсе геометрии основных методов решения является необходимым компонентом обучения. После введения метода учащимся необходимо предложить комплекс, содержащий большое количество задач. Причем, на начальном этапе знакомства с методом целесообразно предложить задачи на отработку метода, его распознавание, а далее, по мере накопления фактических навыков и изучение учебного материала, и на его применение в сложных ситуациях.

Таким образом, уже в 8-9 классах, грамотно повторив известные свойства можно показывать учащимся применение этих свойств при

решении сложных задач ГИА. Это вызывает у учащихся здоровый интерес и снижает уровень страха к задачам повышенной сложности.

Литература:

- 1 Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Юдина И.И. Геометрия: Доп. главы к шк. учеб. 9 кл.: Учеб. пособие для учащихся шк. с углубл. изуч. математики. - М.: Просвещение, 1997. – 176 с
- 2 Готман Э.Г. Две задачи и пять методов решения // Математика в школе. – 1994. - №1 – С. 8 – 11
- 3 Грабов Ю.И. Решение конкурсных задач по математике. – К.: САШКО, 1995. – 200 с
- 4 Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс геометрии: Учеб. пособие: 3-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2004. – 336 с
- 5 Потапов М.К. Математика. Методы решения задач: Учеб. пособие: Для поступающих в вузы.– М.: Дрофа, 1995. – 328 с
- 6 Смирнова И.М. Геометрия. Нестандартные и исследовательские задачи. – М.: Мнемозина, 2004. – 172 с
- 7 Фарков А.В. Учимся решать олимпиадные задачи. Геометрия. 5-11 классы. Учеб. пособие. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 128 с
- 8 Шикова Л.Р. Исследовательская деятельность школьников в процессе решения геометрических задач // Математика в школе. - 1995. - №4 – С. 45 – 50
- 9 Мальцев Д.А., Мальцев А.А., Мальцева Л. И. Математика. ЕГЭ минимум. Подготовка к ЕГЭ 2024. – М: Народное образование, 2024
- 10 Мальцев Д.А., Мальцев А.А., Мальцева Л. И. «Математика. ЕГЭ-2024. Профильный уровень. 44 теста + задачник.- Ростов-на-Дону: Афина, 2024
- 11 Задания из открытого банка ЕГЭ по математике /<http://www.fipi.ru>